考试科目名称　　离散数学（A 卷）

考试方式：闭 卷　考试日期 2018 年 6 月 25 日 教师____

系（专业）计算机科学与技术系　年级______ 班级________

学号__________________ 姓名__________________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	

一、（本题满分 10 分）

用谓词逻辑演算描述出以下推理过程：

“没有一个女学生没有通过离散数学考试，每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试，学生小明很聪明，但是没有通过离散数学考试，所以小明一定不是女生且不够认真。”

得 分	

二、（本题满分 12 分）

令R为A上的一个关系。试证明：R是一个等价关系 当且仅当

存在一个集合B及一个函数$f: A \to B$使得$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

得 分	

三、（本题满分 10 分）

Fermat 素数为 $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \geq 0$.

a）试用数学归纳法证明：$\prod_{r=0}^{n-1} F_r = F_n - 2 \quad (n > 0)$.

b）试基于上述结论证明：对于任意两个不同的自然数 $m < n$，总有$\gcd(F_m, F_n) = 1$.

得 分	

四、（本题满分 12 分）

某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分，并继续下一轮。问：

a） 游戏结束时得分为 0 的概率是多少？

b） 游戏第一轮得分的期望值是多少？

c） 游戏结束时得分的期望值是多少？

得 分	

五、（本题满分 12 分）

群论问题：

a） 试证明有理数群$(\mathbb{Q},+)$不是循环群。

b） 令$(\{e,a,b,ab\},\cdot)$为 Klein 四元群。请给出$\langle a\rangle$的各个陪集。

得 分	

六、（本题满分 10 分）

假设P是连通图G中的一条最长的初级通路（点不重复），且P不是回路。试证明P的端点不是图G的割点。

得 分	

七、（本题满分 12 分）

令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$ 。

a） 若D恰好是某个树T的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

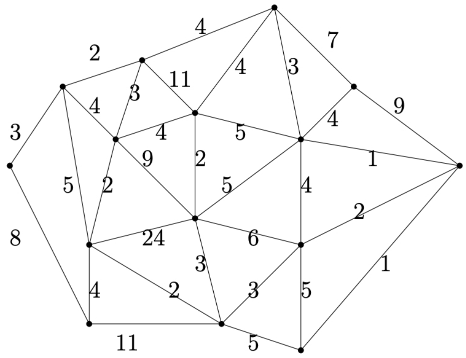
b） 反过来，试证明：若D满足上式，则存在一个树T，使得D恰好是T的各个顶点的度数序列。

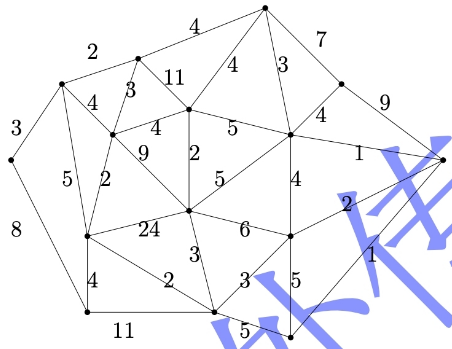
c） 假设D满足上式。试证明：可将D中各整数划分为两个序列S_1, S_2, 使得S_1中正整数之和与S_2中正整数之和相等。

得 分	

八、（本题满分 10 分）

画出下图的最小生成树，并给出其权重（左图可作为草稿，所得最小生成树画在右图上，把所选的边描粗）。





得 分	

九、（本题满分 12 分）

今有布尔代数$(B,+,\cdot,\bar{\ },0,1)$，试证明对于任意的$x,y\in B$, 以下四个命题等价：

a） $x\cdot y=x$

b） $x+y=y$

c） $x\cdot\bar{y}=0$

d） $\bar{x}+y=1$

考试科目名称　　离 散 数 学　　（A 卷）

2018—2019 学年第　二　学期　　教师＿＿＿＿　　考试方式　闭 卷

系（专业）计算机科学与技术系　　年级＿＿＿＿　　班级＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿　　成绩＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

得分	

一、（本题满分 10 分）

请自定义谓词，用谓词逻辑表示下列各语句并推理论证结论是否成立：

“每位大一的同学都需要修读离散数学。每位修读离散数学又对概率论特别感兴趣的同学都将会修读博弈论。小花是大一的同学并且对概率论特别感兴趣。所以，小花同学将会修读博弈论。”

得分	

二、（本题满分 10 分）

试证明：质数阶群皆为可交换群.

得分	

三、（本题满分 10 分）

在单位圆盘（半径为 1 的圆盘，包含圆周）内随机放置 7 个点，要求任意 2 点之间的距离均不小于 1. 试证明：此 7 点中必有一点为圆心.

得分	

四、（本题满分 10 分）

试证明：每个竞赛图均包含一条有向哈密顿通路.

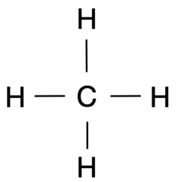
注：竞赛图（tournament）是指底图（将有向图的方向信息去掉之后的无向图）为完全图的有向图.

得分	

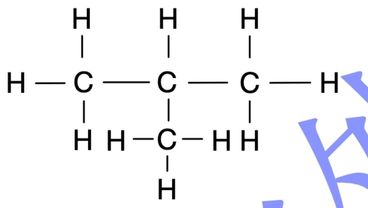
五、（本题满分 10 分）

烷烃（saturated hydrocarbon）是指一类分子式为$\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$的有机化合物，其每个碳原子（C）均有 4 个单键（单键是原子与原子之间力的作用，可看作两个原子之间的一个“连接”），每个氢原子（H）均有 1 个单键，烷烃仅允许碳原子与碳原子之间或者碳原子与氢原子之间通过单键连接，每个碳原子与氢原子的键数均饱和，且不允许任何环（cycle）的存在．例如CH_4和$\mathrm{C}_4\mathrm{H}_{10}$可形成为如图所示的形态（图中的连线表示单键），它们都是烷烃.

试证明：对任意正整数n，若分子$\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$为烷烃则必有$m = 2n + 2$.



甲烷：CH_4



2-甲基丙烷（异丁烷）：$\mathrm{C}_4\mathrm{H}_{10}$

得分	

六、（本题满分 12 分）

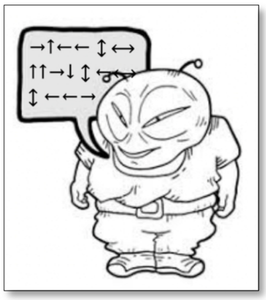
对于布尔代数$\langle B, \cap, \cup, ^{-}, 0, 1\rangle$，若$a, b, x \in B$，试证明：

(1) 若$a \cup x = b \cup x$ 且 $a \cup \bar{x} = b \cup \bar{x}$，则 $a = b$；

(2) 若$a \cap x = b \cap x$ 且 $a \cup x = b \cup x$，则 $a = b$.

得分	

七、（本题满分 12 分）



某外星人的文字只涉及 6 种符号：←、↑、→、↓、↔ 和 ↕，经统计这些符号在外星人通信中出现的频率如下：←占 35%，↑占 13%，→占 12%，↓占 16%，↔占 9%，↕占 15%. 试用 Huffman 算法求出传输它们的最优二进制前缀编码. 请画出编码树，给出各符号的编码并求传输 100 个按上述频率出现的符号需要的二进制位（bit）数.

得分	

八、（本题满分 12 分）

定义： 集合族$(A_1,A_2,\cdots,A_m)$的一个相异代表系（system of distinct representatives, SDR）是指集合$A_1,A_2,\cdots,A_m$中包含的对每个正整数$i(1\le i\le m)$都满足$x_i\in A_i$（称元素x_i为集合A_i的代表元素）的互异的代表元素组$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$.

例如，对集合$\{a,b,c,d\}$的一个子集族$\mathcal{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4)$，其中$A_1=\{a,b,c\}$，$A_2=\{b,d\}$，$A_3=\{a,b,d\}$，$A_4=\{b,d\}$，可见$\mathcal{A}$存在一个 SDR：$(c,b,a,d)$，但$(a,b,b,d)$则不是$\mathcal{A}$的 SDR，因其不满足代表元素的互异性.

试证明：集合族$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$存在 SDR 当且仅当该集合族满足：对所有$k\le n$，集合族中任意k个集合$A_i(1\le i\le n)$的并集中至少包含k个元素.

注：集合族是指由集合构成的序列，序列中的元素（即集合）可以相同.

得分	

九、（本题满分 14 分）

定义（友谊图）：简单图F（$|F|>2$）中任意 2 个顶点（可视为"人"）有且仅有 1 个共同的相邻顶点（可视为"朋友"）.

(1) 请给出任意 2 个友谊图的例子；

(2) 试证明：友谊图F中必不含C_4子图（C_4指 4 阶圈图）；

(3) 试证明：对友谊图F中任意不相邻的顶点u和v，必有$d(u)=d(v)$.

考试科目名称　　离 散 数 学 （A 卷）

2019—2020 学年第 二 学期　　教师＿＿＿＿＿＿　　考试方式 闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系　　年级 一　　班级＿＿＿＿＿＿

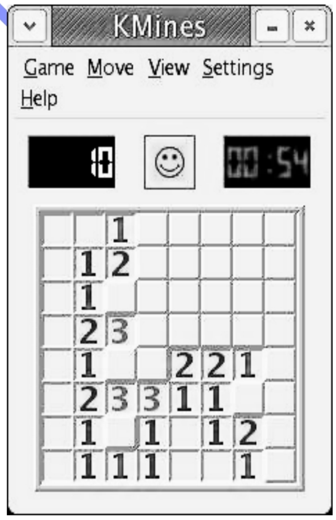
学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿　　成绩＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得 分									

得分	

一、（本题满分 12 分）

考虑如右图所示的扫雷游戏．地雷个数n显示在左上方（这里$n = 10$）；若某个格中填有数字k，则与其相邻的格中总共恰有k个格有地雷．现以一阶谓词逻辑形式地表述此问题．引入下列谓词：



- 一元谓词$\mathrm{mine}(x)$表示方格x中有地雷．例如，$\neg\mathrm{mine}\big((1,1)\big)$表示左上角的方格中没有地雷；
- 二元谓词 $\mathrm{adj}(x, y)$ 表示方格 x 与 y 相邻，包括对角相邻．例如，$\mathrm{adj}\big((1,1),(2,2)\big) = \boldsymbol{T}$；
- 二元谓词 $\mathrm{contains}(x, k)$ 表示方格x中填有数字k.

1. 请用一阶谓词逻辑形式表述性质：<u>总共恰有n个格中有地雷.</u>
2. 请用一阶谓词逻辑形式表述性质：<u>若某格中填有数字 1，则其恰有 1 个相邻格中有地雷.</u>
3. 请用谓词逻辑演绎推理论证：右图的格$(3,3)$中必有地雷.

得分	

二、（本题满分 10 分）

令S为一个集合，$\mathcal{P}(S)$为其幂集. 对于$A, B \in \mathcal{P}(S)$，定义 $A \preccurlyeq B$ 当且仅当$|A| \le |B|$. 问$\preccurlyeq$是否为$\mathcal{P}(S)$上的一个偏序关系？请证明你的结论.（提示：考虑S的各种不同情况）

得分	

三、（本题满分 12 分）

对于任意素数p，定义集合$S = \{1,2,\cdots,p-1\}$上的关系

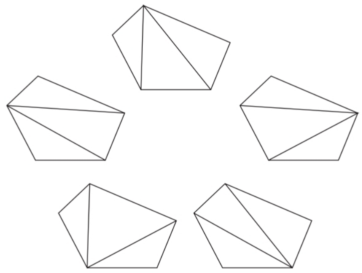
$$R = \{(a,b) \mid a = b \lor ab \equiv 1 (\bmod p), a \in S, b \in S\}$$

试问R是否为等价关系？若是，请给出证明；若否，请给出反例.

得分	

四、（本题满分 12 分）

二叉搜索树(BST)是节点带标号的有序二叉根树，其所有的子树都满足根节点标号大于左子树中所有节点的标号，而小于右子树中所有节点标号. 记C_n为以$1,2,\cdots,n$为各节点标号的不同的 BST 的个数.



1. 请利用基本计数原理给出C_n的递推公式，这里约定$C_0=1$；
2. 凸多边形的三角化(triangulation)是指在多边形内添加互不相交的对角线，把多边形划分为一系列三角形的操作. 右图即是五边形的 5 种不同的三角化.

   试证明：凸$(n+2)$边形的不同的三角化的个数为C_n；
3. 试求序列C_n的生成函数 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,x^n$.

得分	

五、(本题满分 12 分)

1. 设想你到某镇旅游，你也知道此镇居民不够诚实，三句话中有两句是谎言. 现有镇上居民甲告诉你镇上没旅馆. 你不大相信他，又拿甲的答案向镇上居民乙求证，乙说甲说的是真的. 问：甲此次说的是真话的概率是多少?

2. 已知口袋中有R个红球和W个白球. 每次从中随机取出一个球，且不再放回，直至所有红球均被取出. 问：期望最后剩余几个白球?（提示：考虑某个特定白球最后剩下的概率和期望的线性特性.）

得分	

六、（本题满分 10 分）

设L是格，试证明：

1. 对于$a, b, c \in L$，若有 $a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$，则 $a \vee b = b \wedge c$；
2. 对于$a \in L$，令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preccurlyeq a\}$，证明 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是L的子格.

得分	

七、（本题满分 12 分）

今有两个群$\langle G, \circ \rangle$及$\langle H, \star \rangle$，其单位元分别为e_G和e_H. 设这两个群之间有同态映射$\varphi: G \to H$. 定义φ的核(kernel)为

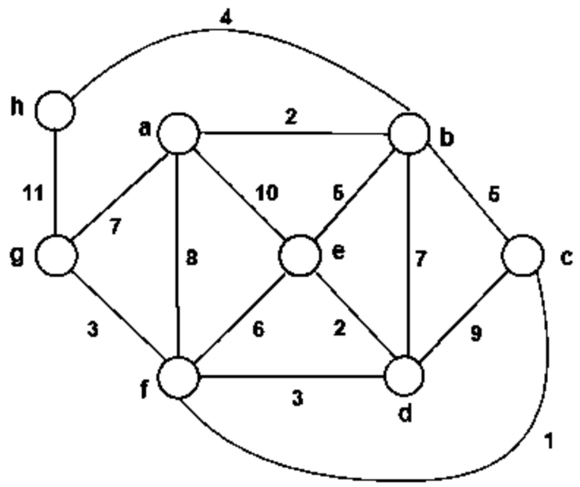
$$\ker \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\},$$

1. 试证明：$\langle \ker \varphi, \star \rangle$是群$H$的一个子群；
2. 试证明：若$\ker \varphi = \{e_G\}$则φ为单射.

得分	

八、(本题满分 10 分)

请给出下图的最小生成树并计算其最小生成树的权值（可以直接在图上用粗边标注最小生成树的边）



得分	

九、(本题满分 10 分)

试证明：对于一个简单连通图G，若其每条边都处于奇数个初级回路（即回路中顶点不重复）中，则G为欧拉图.（提示：考虑每个顶点的度数.）